Formes quadratiques

Imen BHOURI

[1]

Ce cours s'adresse aux étudiants de niveau deuxième année de Licence et à ceux qui préparent le capes. Il combine d'une façon indissociable l'étude des concepts bilinéaires des formes quadratiques avec l'étude matricielle et géométrique. C'est un cours illustré par des exemples aléatoires et des exercices avec plusieurs réponses possibles ou des avertissements selon l'erreur ainsi que des exercices à étapes et utilisant des bases de données importantes.

1 Formes quadratiques et formes polaires associées

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1.1 Définitions

1.1.1 Forme quadratique, Forme polaire

Définition 1.1. On appelle **forme quadratique** de E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ telle que

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$
2. l'application
$$\begin{array}{rcl} b : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \end{array}$$
est une forme bilinéaire symétrique.

La forme bilinéaire b est appelée **la forme polaire** de q.

Remarque 1.1. *Si q est une forme quadratique de forme polaire b, alors*

$$\forall \quad x \in E, \quad q(x) = b(x,x).$$

Exemple 1. – Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $<,>$. L'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & < x,x > \end{array}$$

est une forme quadratique sur E.

[1] Ce travail a été réalisé à l'occasion d'un projet Tempus, action JEP-31147-2003, impliquant d'une part l'université Paris-Sud, l'université de Lille (USTL) et l'université de Delft (TU Delft) et d'autre part l'université de Monastir (ISM et FSM) et l'université de Sousse (ISITC)

– Soit $E=\mathbb{R}^4$, l'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+y^2+z^2-t^2 \end{array}$$

est une forme quadratique bien connue en mécanique quantique.

Exemple 1.

Définition 1.2 (Effet de changement de bases)**.** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si q est une forme quadratique de E de forme polaire associée b, on a vu dans le chapitre précédent que la relation entre les matrices de la forme bilinéaire b dans les différentes bases est donnée par

$$Mat(b,\mathcal{B}') = {}^t PMat(b,\mathcal{B})P$$

et donc

$$Mat(q,\mathcal{B}') = {}^t PMat(q,\mathcal{B})P.$$

1.2 Expression analytique d'une forme quadratique

1.2.1 Définition

Définition 1.3 (Expression analytique)**.** Soit q une forme quadratique de E de forme polaire b et $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Posons

$$M = Mat(q,\mathcal{B}) = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.$$

Soit $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$, un élément de E. On a

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_i x_j.$$

Comme M est symétrique alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{i<j} m_{i,j}x_i x_j$$

Ce polynôme homogène de degré 2 en $x_1,\cdots,x_n$ est appelé **expression analytique** de q.

1.2.2 Méthode de dédoublement d'indices et exemples

La méthode de dédoublement d'indice permet de retrouver l'expression analytique de b à partir de celle de q :

dans l'expression analytique de q, on remplace les x_i^2 par $x_i y_i$ et les $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$ pour $i\neq j$, on obtient ainsi celle de b.

Exercice 1. WIMS : Formes Polaires

1.3 Rang et noyau d'une forme quadratique

Définition 1.4. 1. Soit q une forme quadratique de E et $\mathcal{B}$ une base de E, $M = Mat(q,\mathcal{B})$. On appelle **rang de** q, noté $\operatorname{rg} q$, le rang de la matrice M.

2. On appelle **noyau de** q le sous-espace vectoriel de E :

$$\ker q = \{x \in E ; \forall \quad y \in E, \quad b(x,y) = 0\}.$$

Remarque 1.2. *Remarquons que* $\operatorname{rg} q$ *ne dépend pas de la base choisie et le noyau de q est celui de sa matrice relativement à n'importe quelle base. (Pourquoi ?) : En effet, si* $\mathcal{B}'$ *est une autre base de E et* $A = Mat(q,\mathcal{B}')$ *alors* $A = {}^t PMP$ *et* $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} M$*, d'autre part, il est clair que* $\ker M \subset \ker q$*, réciproquement, si* $x \in \ker q$ *alors*

$$\forall \quad y \in E, \quad b(x,y) = {}^t XMY = {}^t YMX = 0$$

donc $\quad MX = 0$ *et par conséquent,* $x \in \ker M$.

1.4 Formes quadratiques non dégénérées

Définition 1.5. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de forme polaire b. On dit que

1. q est **non dégénérée** si b est non dégénérée c'est-à-dire

$$(\forall y \in E, \quad b(x,y) = 0) \Longrightarrow x = 0.$$

2. q est **positive** si b est positive.
3. q est **définie positive** si b est définie positive.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme quadratique soit non dégénérée.

Proposition 1.3. *Soit q une forme quadratique de E. Considérons une base $\mathcal{B}$ de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *q est non dégénérée.*
2. $\ker q = \{0\}$.
3. *La matrice M de q dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.*

Démonstration. Par définition, q est non dégénérée si et seulement si son noyau est nul, on déduit d'après le théorème du **rang** que le rang de q est égal à la dimension de E ce qui est équivalent à $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} q = n$, c'est-à-dire à ce que la matrice M est inversible. □

2 Orthogonalité

2.1 Bases orthogonales relativement à une forme quadratique

2.1.1 Définitions et Remarques

Définitions 2.1. 1. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E. Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux par rapport à** b si $b(x,y) = 0$.

2. Une base $(v_1,\dots,v_n)$ de E est dite **orthogonale par rapport à** b si

$$b(v_i,v_j)=0 \quad \forall \quad i\neq j, 1\leq i,j\leq n.$$

3. Si q est la forme quadratique associée à b. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux par rapport à** q s'ils sont orthogonaux par rapport à b.
4. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on définit **l'orthogonal de** F **pour** b, noté $F^{\perp}$:

$$F^{\perp}=\{x\in E/b(x,y)=0, \forall y\in F\}.$$

Remarques 2.2. *Soit $b: E\times E\to\mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique.*

1. *Une base $B(v_1,\cdots,v_n)$ de E est orthogonale par rapport à b si et seulement si $Mat(b,\mathcal{B})$ est diagonale.*
2. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M=Mat(b,\mathcal{B})$, trouver une base orthogonale par rapport à b revient à trouver $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ soit diagonale.*

Définition 2.1 (Vecteur isotrope)**.** Un vecteur x est dit **isotrope** (pour q) si $q(x)=0$.

Remarques 2.3. 1. *Il se peut qu'il existe des vecteurs isotropes non nuls. Par exemple, si $E=\mathbb{R}^2$ et*

$$\begin{array}{rcl} b: E\times E & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto & x_1y_1-x_2y_2 \end{array}$$

le vecteur $(1,1)$ est isotrope pour q.

2. *Les vecteurs du noyau d'une forme quadratique sont isotropes mais la réciproque est fausse.*
3. *Si tout vecteur de E est isotrope, alors la forme quadratique q est nulle.*

2.1.2 Existence de bases orthogonales

Proposition 2.4. *Soit b une forme bilinéaire symétrique de E, alors E possède au moins une base orthogonale par rapport à b.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n, la dimension de E. La propriété est triviale pour $n=1$. Supposons-la vraie pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et b une forme bilinéaire symétrique sur $E\times E$.

Si $b=0$, alors toute base de E est orthogonale pour b et E admet au moins une base. Supposons donc $b\neq 0$. Si tout vecteur de E est isotrope, alors b est nulle. Donc, il existe $e_1\in E$ tel que $q(e_1)\neq 0$. Considérons $F=\{e_1\}^{\perp}$ et la restriction b' de b à $F\times F$.

Lemme 1. *Soit e_1 un vecteur tel que $q(e_1)\neq 0$, alors les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}e_1$ et $F=\{e_1\}^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.*

Démonstration du lemme. Soit $x\in E$. Pour tout (α,y) de $\mathbb{R}\times E$, on a

$$\begin{cases} x=\alpha e_1+y \\ y\in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha e_1+y \\ b(e_1,y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha e_1+y \\ b(e_1,x)=\alpha q(e_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{b(e_1,x)}{q(e_1)} \\ y=x-\frac{b(e_1,x)}{q(e_1)}e_1 \end{cases}$$

Ceci montre que tout élément x de E se décompose d'une façon unique sur $\mathbb{R}e_1$ et F, donc $\mathbb{R}e_1$ et F sont supplémentaires dans E. En particulier, $\dim F=n$. □

Revenons à la démonstration de la proposition. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \cdots, e_{n+1})$ de F qui est orthogonale pour b'. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n+1})$, on a :

– $\mathcal{B}$ est une base de E car $\mathbb{R}e_1$ et F sont supplémentaires.
– $\forall \quad 2 \leq j \leq n+1, b(e_1, e_j) = 0$ car $e_j \in F = \{e_1\}^\perp$.
– $\forall \quad 2 \leq i, j \leq n+1$, $(i \neq j \Longrightarrow (b(e_i, e_j) = 0)$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E orthogonale pour b. □

Corollaire 2.5. *Pour toute matrice symétrique S , il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = {}^t PSP$.*

Démonstration. Soit S une matrice symétrique réelle et notons b la forme bilinéaire symétrique dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est S. D'après la proposition précédente, il existe une base orthogonale par rapport à b, ainsi la matrice de b dans cette base est diagonale. D'après le théorème de changement de bases pour les formes bilinéaires symétriques, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $D = {}^t PSP$. □

Remarque 2.6. *Attention, les éléments de la diagonale de D ne sont pas nécessairement les valeurs propres de S.*

Corollaire 2.7. *Toute forme quadratique q sur E est décomposable, d'au moins une façon, en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

Démonstration. Soient q une forme quadratique sur E de forme polaire b, d'après ce qui précède, il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de E et la matrice D de q dans cette base est diagonale $D = \operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$. Soit x un vecteur de E de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. L'expression analytique de q s'écrit alors

$$q(x) = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2.$$

En notant

$$\begin{aligned} \ell_i : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i \end{aligned}$$

les ℓ_i sont des formes linéaires, de plus la famille $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ est libre car c'est la base duale de $\mathcal{B}$. □

2.2 Signature d'une forme quadratique

Théorème 2.8. *Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe $(v_1, \cdots, v_n)$ une base de E orthogonale par rapport à q et des entiers r et s vérifiant $0 \leq r \leq r+s \leq n$ tels que*

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 \cdots - x_{r+s}^2$$

***Les entiers** r **et** s **ne dépendent que de** q.*

*Le couple (r, s) s'appelle **signature** de q et le rang de q vaut $r+s$.*

Démonstration. On va montrer l'existence et l'unicité de r et s.

Existence : Il existe $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de E orthogonale par rapport à q. Quitte à réordonner ces vecteurs, on peut supposer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n$ et $r+s \leq n$ vérifiant

$$\begin{array}{lll} q(u_i) > 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq r & (r \text{ peut être nul}) \\ q(u_i) < 0 & \text{pour } r+1 \leq i \leq r+s & (s \text{ peut être nul }) \\ q(u_i) = 0 & \text{pour } i > r+s & (r+s \text{ peut être égal à } n) \end{array}$$

Posons

$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{q(u_i)}} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r,$$
$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{-q(u_i)}} \quad \text{pour } r+1 \leq i \leq r+s$$
$$v_i = u_i \quad \text{pour } i > r+s.$$

$B = (v_1, \cdots, v_n)$ est une base de E orthogonale par rapport à q et on a

$$M = Mat(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\operatorname{rg} q = rgM$ alors $\operatorname{rg} q = r+s$.

Unicité : Supposons qu'il existe r' et s' dans $\mathbb{N}$ et $(v'_1, \cdots, v'_n)$ une base de E orthogonale par rapport à q telle que

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i v'_i\right) = x_1'^2 + \cdots + x_{r'}'^2 - x_{r'+1}'^2 \cdots - x_{r'+s'}'^2$$

on a $r' + s' = \operatorname{rg} M = r+s$.

Vérifions que $\{v_1, \cdots v_r, v'_{r'+1}, \cdots v'_n\}$ est un famille libre de E.

Supposons que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \beta_1 v'_{r'+1} + \cdots + \beta_{n-r'} v'_n = 0$

On aura alors $q\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = q\left(-\sum_{i=1}^{n-r'} \beta_i v'_{r'+i}\right)$. On en déduit,

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_r^2 = -\beta_1^2 \cdots - \beta_{s'}^2.$$

et par suite $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots \beta_{s'} = 0$. Comme $\{v'_{r'+s'+1}, \cdots v'_n\}$ est une sous-famille d'une famille libre alors $\beta_{s'+1} = \cdots \beta_{n-r'} = 0$.

La famille $\{v_1, \cdots v_r, v'_{r'+1}, \cdots v'_n\}$ est donc libre. Par suite, son cardinal $r+n-r'$ est majoré par la dimension de E alors on a $r \leq r'$.

On montre de la même façon que $r' \leq r$ on en déduit $r = r'$ puis $s = s'$.

□

Exercice 2. WIMS : Signature et rang

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique soit non dégénérée.

Proposition 2.9. *Soit q une forme quadratique de E de signature (r,s). Considérons une base $\mathcal{B}$ de E. Alors, q est non dégénérée si et seulement si $r+s=n$.*

Démonstration. Par définition, q est non dégénérée si et seulement si son noyau est nul, on déduit d'après le théorème du **rang** que le rang de q est égal à la dimension de E ce qui est équivalent à $r+s=n$. □

Proposition 2.10. *Soient $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de signature (r,s).*

1. *q est positive $\Longleftrightarrow s = 0$*
2. *q est définie positive $\Longleftrightarrow r = n$*

3 Décomposition en carrés d'une forme quadratique

3.1 Méthode de Gauss

Le but de cette méthode est d'écrire une forme quadratique comme une somme de carrés.

Théorème 3.1. *Soit q une forme quadratique non nulle de E alors il existe $\ell_1, \cdots, \ell_p$ des formes linéaires indépendants de E et $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ des réels non nuls tels que*

$$q = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \ell_i^2$$

en outre, on a

$$\operatorname{rg} q = p$$

et

$$\ker q = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \ell_1(x) = \ell_2(x) = \cdots = \ell_p(x) = 0\}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.

pour $n = 1$. Soit (e_1) une base de E, tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1$, donc $q(x) = q(e_1) x_1^2$ et alors $q(e_1) = \alpha \neq 0$ car $q \neq 0$. On choisit dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} \ell_1 : E & \to & \mathbb{R} \\ x_1 e_1 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $p \leq n-1$ et soit q une forme quadratique de E.Soit $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E, on sait que

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\, x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}\, x_i x_j$$

Premier Cas : S'il existe i_0 tel que $a_{i_0,i_0} \neq 0$: pour fixer les idées, supposons que $a_{1,1} \neq 0$.

Le principe est de regrouper tous les termes contenant x_1 et faire apparaître un début de carré.

$$q(x) = a_{1,1} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Notons $q_1(x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$. Remarquons que c'est une forme quadratique en $x_2, \cdots, x_n$. On a

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & a_{1,1} \left(x_1^2 + \frac{2}{a_{1,1}} \sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j \right) + q_1(x_2, \cdots, x_n) \\ & = & a_{1,1} \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}} \right)^2 \\ & & - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2 + q_1(x_2, \cdots, x_n). \end{array}$$

Soit alors
$a_1 = a_{1,1}$ et $\ell_1 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1,j} x_j}{a_{1,1}}$.

$$q_2 : (x_2, \cdots, x_n) \mapsto q_1(x_2, \cdots, x_n) - \frac{1}{a_{1,1}} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j \right)^2$$

est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$, on lui applique alors l'hypothèse de récurrence. Les formes linéaires récupérées en utilisant l'hypothèse de récurrence sont nécessairement libres avec ℓ_1 vu qu'elles n'ont pas de composantes suivant x_1.

Deuxième Cas : Cas où tous les $a_{i,i}$ sont nuls, la forme quadratique s'écrit alors sous la forme $q(x) = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} x_i x_j, \quad \forall x \in E$. Sans perte de généralité, supposons que $a_{1,2} \neq 0$.

L'idée est de regrouper tous les termes contenant x_1 et x_2.

$$q(x) = 2a_{1,2}x_1x_2 + 2\sum_{j=3}^{n} a_{1,j}x_1x_j$$

$$+2\sum_{j=3}^{n} a_{2,j}x_2x_j + 2\sum_{3\leq i<j\leq n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Posons,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \textstyle\sum_{j=3}^{n} a_{1,j}x_j, \\ \psi(x) &= \textstyle\sum_{j=3}^{n} a_{2,j}x_j \\ \theta(x) &= 2\textstyle\sum_{3\leq i<j\leq n} a_{i,j}x_ix_j \end{aligned}$$

Remarquons que θ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_3, \cdots, x_n$. Une fois que c'est fait, on regroupe ces formes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{1,2}x_1x_2 + 2x_1\varphi(x) + 2x_2\psi(x) + \theta(x) \\ &= \tfrac{2}{a_{1,2}} \left[a_{1,2}^2 x_1x_2 + a_{1,2}x_1\varphi(x) + a_{1,2}x_2\psi(x) \right] + \theta(x) \\ &= \tfrac{2}{a_{1,2}} (a_{1,2}x_1 + \psi(x))(a_{1,2}x_2 + \varphi(x)) - \tfrac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x) + \theta(x) \end{aligned}$$

$q_1 : (x_3, \cdots, x_n) \mapsto \theta(x) - \frac{2}{a_{1,2}}\varphi(x)\psi(x)$ est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-2$. (Pourquoi ?) : En effet, le produit de deux formes linéaires est une forme quadratique.

En utilisant la relation $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$, on obtient

$$\begin{aligned} q(x) &= \tfrac{1}{2a_{1,2}} \left[(a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \psi(x) + \varphi(x))^2 - (a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 + \psi(x) - \varphi(x))^2 \right] \\ &+ q_1(x_3, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Posons, $a_1 = \frac{1}{2a_{1,2}}$, $a_2 = \frac{1}{2a_{1,2}}$,

$$\ell_1 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \psi(x) + \varphi(x)$$

et

$$\ell_2 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 + \psi(x) - \varphi(x).$$

Les formes ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires indépendantes de $\mathbb{R}^n$ et q_1 est une forme quadratique à qui on applique l'hypothèse de récurrence.

$\square$

Remarque 3.2. *La démonstration du théorème précédent est la méthode pratique de réduction de Gauss.*

Corollaire 3.3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, la signature de q est (r,s) où*

$$r = \operatorname{card}\{a_i > 0, i = 1, \cdots, p\}$$

et

$$s = \operatorname{card}\{a_i < 0, i = 1, \cdots, p\}.$$

Remarque utile 1. *La décomposition de Gauss permet aussi de déterminer une base orthogonale par rapport à la forme quadratique.*

3.2 Exemples

Dans cette sous section, on donne trois exemples de réduction de Gauss d'une forme quadratique. Conseil : Lire la preuve du théorème précédent en regardant les exemples.

3.2.1 Exemple 1 : Forme quadratique avec carrés

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} q(x,y,z) & = & 2x^2 - y^2 - 4xy - 8yz \\ & = & 2(x^2 - 2xy) - y^2 - 8yz \\ & = & 2(x-y)^2 - 9y^2 - 8yz \\ & = & 2(x-y)^2 - 9\left(y^2 + \frac{8}{9}yz\right) \\ & = & 2(x-y)^2 - 9\left(y + \frac{4}{9}z\right)^2 + \frac{16}{9}z^2 \end{array}$$

Posons $\begin{cases} \ell_1(x,y,z) = x - y \\ \ell_2(x,y,z) = y + \frac{4}{9}z \\ \ell_3(x,y,z) = z \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y + \frac{4}{9}z \\ z' = z \end{cases}$.

(ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de l'espace dual E^* de E.

On a $q(x',y',z') = 2x'^2 - 9y'^2 + \frac{16}{9}z'^2$ donc si $P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

alors les vecteurs de composantes les colonnes de P forment une base orthogonale par rapport à q. Une base orthogonale par rapport à q est donc (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (-4/9, -4/9, 1)$

Exemple 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} q(x,y,z) & = & x^2 + xy + xz \\ & = & \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 \end{array}$$

Soit $\ell_1(x,y,z) = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$
$\ell_2(x,y,z) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$
On choisit la forme linéaire ℓ_3 telle que la famille (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) soit une base de l'espace dual E^* de E. Soit

$$\ell_3(x,y,z) = z.$$

Posons

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z' = z \end{cases}$$

On a $q(x',y',z') = x'^2 - y'^2$ donc si $P \in M_3(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

les vecteurs de composantes les colonnes de P forment une base orthogonale par rapport à q. Une base orthogonale par rapport à q est donc (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (-1,2,0)$ et $v_3 = (0,-1,1)$

3.2.2 Exemple 2 : Forme quadratique sans carrés

Exemple 4. Soit $E = \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= xy + xz + yz + zt \\ &= (x+z)(y+z) - z^2 + zt \\ &= \tfrac{1}{4}(x+2z+y)^2 - \tfrac{1}{4}(x-y)^2 - \left(z - \tfrac{1}{2}t\right)^2 + \tfrac{1}{4}t^2 \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{cases} \ell_1(x,y,z,t) = x + 2z + y \\ \ell_2(x,y,z,t) = x - y \\ \ell_3(x,y,z,t) = z - \frac{1}{2}t \\ \ell_4(x,y,z,t) = t \end{cases}$$

La famille $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ est une base de l'espace dual E^* de E. Posons

$$\begin{cases} x' = x + 2z + y \\ y' = x - y \\ z' = z - \frac{}{2}t \\ t' = t \end{cases}$$

On a

$$q(x',y',z') = \frac{1}{4}x'^2 - \frac{1}{4}y'^2 - z'^2 + \frac{1}{4}t'^2$$

donc si $P \in M_4(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

les vecteurs de composantes les colonnes P forment une base orthogonale par rapport à q. Une base orthogonale par rapport à q est alors (v_1, v_2, v_3, v_4) où

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right),$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{2}, -1, 0, 0\right),$$

$$v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

et

$$v_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

3.2.3 Exercices

Exercice 3. WIMS : Réduction de Gauss

3.3 Décomposition dans une base de vecteurs propres

Proposition 3.4. *Soient $\mathcal{B}$ une base de E et q une forme quadratique sur E, notons $M = Mat(q, \mathcal{B})$, alors il existe une base orthogonale par rapport à q formée par des vecteurs propres de M.*

Démonstration. Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On sait que $M = Mat(q, \mathcal{B})$ est symétrique réelle, donc il existe $P \in O(n)$ telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP$ soit diagonale. Alors $(Pe_1, \cdots, Pe_n)$ est une base orthogonale par rapport à q. □

Corollaire 3.5. *Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de signature (r, s) et $\mathcal{B}$ une base de E. Si $M = Mat(q, \mathcal{B})$, alors r est le nombre de valeurs propres positives de M et s est le nombre de valeurs propres négatives de M.*

Exercice 4. WIMS : Signature d'une forme quadratique

Exercice 5. WIMS : Rang d'une forme quadratique

Proposition 3.6. *Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de signature (r, s).*

1. *q est positive $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de M sont positives.*
2. *q est définie positive $\Longleftrightarrow$ toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.*

3.4 Formes quadratiques équivalentes

Définition 3.1. Deux formes quadratiques q_1 et q_2 de E sont dites **équivalentes** s'il existe un automorphisme $u : E \to E$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Remarque 3.7. *La relation binaire "équivalente" est une relation d'équivalence.*

Proposition 3.8. *Soient $\mathcal{B}$ une base de E, q_1 etq_2 deux formes quadratiques de E de matrices respectives relativement à la base $\mathcal{B}$, A_1 et A_2. Alors, q_1 etq_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $A_2 = {}^tPA_1P$.*

Démonstration. Les formes quadratiques q_1 et q_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe un automorphisme u de E tel que $q_2 = q_1 \circ u$. Notons $P = Mat(u, \mathcal{B})$, soient $x \in E$ et X la matrice des composantes de x dans $\mathcal{B}$. On a alors

$$\begin{aligned} q_2(x) = q_1(u(x)) &\iff {}^tXA_2X = ^t(PX)A_1PX = ^tX({}^tPA_1P)X \\ &\iff A_2 = ^tPA_1P \end{aligned}$$

□

Nous admettons ce résultat qui caractérise deux formes quadratiques équivalentes.

Théorème 3.9. *Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.*

Exercice 6. WIMS : Formes quadratiques équivalentes

4 Formes quadratiques sur un espace euclidien

4.1 Forme quadratique et endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $<,>$.

Proposition 4.1. *Soit u un endomorphisme de E. Alors l'application*

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto < u(x), y > \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur E. De plus b est symétrique si et seulement si u autoadjoint.

Théorème 4.2. *Soit q une forme quadratique sur E. Alors, il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de E tel que $q(x) =< u(x), y >$ pour tout $x \in E$ et la matrice de u dans une base orthonormée est celle de q dans la même base.*

Démonstration.

1. Existence : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, notons $M = Mat(q, \mathcal{B})$ et b la forme polaire de q. Pour tous x et y de E, si X et Y désignent leurs matrices des composantes respectives on a,

$$b(x,y) = ^tXMY = ^t(MX)Y$$

car M est symétrique. l'endomorphisme u de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$, est autoadjoint (Pourquoi ?) : En effet, sa matrice dans une base orthonormée est symétrique. et on a $b(x,y) =< u(x), y >$.

2. Unicité : Supposons qu'il existe deux endomorphismes autoadjoints u et u' vérifiant

$$b(x,y) =< u(x), y >=< u'(x), y >$$

$\forall (x,y) \in E \times E$. Par conséquent,

$$u(x) - u'(x) \in E^{\perp} = 0 \quad \forall x \in E.$$

D'où,

$$u = u'.$$

□

4.2 Bases orthonormées, orthogonales par rapport à q

Théorème 4.3. *Soit q une forme quadratique de E. Il existe une base orthonormée de E orthogonale par rapport à q.*

Démonstration. Soit u l'endomorphisme autoadjoint associé à q. On sait que u est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E formée par des vecteurs propres de u. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, qui est aussi d'après la remarque précédente la matrice de q dans la même base, est diagonale, d'où $\mathcal{B}$ est orthogonale par rapport à q. □

Remarque importante 1. *Soient q une forme quadratique de E et $\mathcal{B}$ une base* ***orthonormée*** *de E, notons $M = Mat(q, \mathcal{B})$. Pour déterminer une base orthogonale par rapport à q et orthonormée par rapport au produit scalaire $<,>$, il faut absolument considérer une base* ***orthonormée*** *de vecteurs propres de la matrice M. Par contre, pour avoir juste une base orthogonale par rapport à q, on peut utiliser la réduction de Gauss.*

Exercice 7. WIMS : Bases orthogonales

5 Application : Coniques du plan affine euclidien

Dans cette partie on va donner aux coniques qui sont bien connues géométriquement, un aspect algébrique et on va les définir à partir des formes quadratiques.

Rappel : Une conique est la courbe obtenue en coupant un cône par un plan.

5.1 Définitions

Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un point M de $\mathcal{E}$.

Définition 5.1. Une **conique** de $\mathcal{E}$ est le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ défini dans $\mathcal{R}$ par une équation du type

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,\ 0,\ 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$. On note q la forme quadratique sur E définie par

$$q(\overrightarrow{OM}) = q(x\vec{i} + y\vec{j}) = ax^2 + bxy + cy^2$$

A sa matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

et ψ la forme linéaire sur E

$$\psi(x\vec{i} + y\vec{j}) = dx + ey$$

de matrice $B = (d, e)$ La conique admet donc pour équation

$$q(\overrightarrow{OM}) + \psi(\overrightarrow{OM}) + f = 0.$$

L'équation de la conique s'écrit aussi

$${}^tXAX + BX + f = 0.$$

5.2 Forme réduite d'une équation de conique

Soit u l'endomorphisme autoadjoint de E tel que

$$\forall v \in E, \phi(v) = < u(v)\,,\, v >$$

Comme u est autoadjoint, il est diagonalisable dans une base $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives λ et μ de u. Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{v_1}, \vec{v_2})$, on note (x', y') les composantes de M, alors il existe $\beta_1, \beta_2, f \in \mathbb{R}$ tel que une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ soit

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 - 2\beta_1 x' - 2\beta_2 y' + f = 0. \tag{1}$$

Cette forme d'équation est appelée réduite de la conique $\mathcal{C}$.

5.3 Centre de symétrie d'une conique

Définition 5.2. Soit $\omega \in \mathcal{E}$ et S_ω la symétrie centrale de $\mathcal{E}$ de centre ω, on dit que ω est **centre de symétrie de** $\mathcal{C}$, si pour tout point M de $\mathcal{C}$, $M' = S_\omega(M)$ appartient à $\mathcal{C}$.

Nous allons donner maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point du plan soit le centre de symétrie d'une conique.

Proposition 5.1. *Soit ω un point de coordonnées $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *ω est **centre de symétrie de** $\mathcal{C}$*
2. *$AX_0 = -\frac{{}^tB}{2}$*
3. *(S)* $\left\{ \begin{array}{rcl} 2ax_0 + by_0 + d & = & 0 \\ bx_0 + 2cy_0 + e & = & 0 \end{array} \right.$

Démonstration. Soit $\mathcal{R}_0$ le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$, un point M de coordonnées X dans $\mathcal{R}$ a pour coordonnées $Y = X - X_0$ dans $\mathcal{R}_0$. On détermine une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_0$ ainsi :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{C} & \Longleftrightarrow & {}^tXAX + BX + f = 0 \\ & \Longleftrightarrow & {}^t(X_0 + Y)A(X_0 + Y) + B(X_0 + Y) + f = 0 \\ & \Longleftrightarrow & {}^tYAY + (2{}^tX_0A + B)Y + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f = 0 \end{array}$$

Donc une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_0$ est

$${}^tYAY + (2{}^tX_0A + B)Y + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f = 0 \tag{2}$$

D'autre part, $M' = S_\omega(M)$ a pour coordonnées $Y' = -Y$ dans $\mathcal{R}_0$. On a donc

$${}^tY'AY' + (2{}^tX_0A + B)Y' + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f$$

$$= {}^tYAY - (2{}^tX_0A + B)Y + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f$$

Si de plus $M \in \mathcal{C}$ alors

$${}^tY'AY' + (2{}^tX_0A + B)Y' + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f = 0$$

ce qui est équivalent à

$$(2{}^tX_0A + B)Y = 0$$

Donc, dans ce cas ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ si et seulement si M' appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $AX_0 = -\frac{{}^tB}{2}$, c'est-à-dire coordonnée par coordonnée

$$\begin{cases} 2ax_0 + by_0 + d &= 0 \\ bx_0 + 2cy_0 + e &= 0 \end{cases}$$

$\square$

Remarque 5.2. *1. Il existe un unique centre de symétrie de la conique $\mathcal{C}$ si et seulement si A est de rang 2, c'est-à-dire si q est non dégénérée.*

2. Dans le cas où q est dégénérée, le système (S) n'est pas de Cramer et la conique $\mathcal{C}$ n'a pas nécessairement un centre de symétrie.

Proposition 5.3 (Equation réduite de $\mathcal{C}$). *1. Il découle immédiatement de la proposition précédente que ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}$ si et seulement si l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_0$ est*

$$ {}^tYAY + {}^tX_0AX_0 + BX_0 + f = 0.$$

2. On note $(x", y")$ les composantes de M dans le repère $\mathcal{R}" = (\omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, alors l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}"$ a l'une des deux formes suivantes :

$$\lambda x"^2 + \mu y"^2 + h = 0 \quad ou \quad \lambda x"^2 - 2\beta_2 y" + h = 0. \tag{3}$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda \geq 0$ dans tout ce qui suit.

5.4 Classification des coniques

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation 3 dans un repère $\mathcal{R}" = (\omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, ω est donc le centre de symétrie de $\mathcal{C}$. On note q la forme quadratique $\lambda X^2 + \mu Y^2$. Nous allons classifier les coniques suivant le rang de la forme quadratique associée ou encore suivant λ, μ, β_1 et β_2.

Théorème 5.4. *1. Si le rang de q est égal à 2 alors $\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole ou la réunion de deux droites.*

2. Si le rang de q est égal à 1 alors $\mathcal{C}$ est une parabole ou la réunion de deux droites ou un point.

Démonstration. **Premier Cas :** Cas où la forme quadratique q est non dégénérée c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, q = 2$.

Comme q est non dégénérée alors le produit des deux valeurs propres λ et μ est non nul. Soit $\omega\left(\frac{\beta_1}{\lambda}, \frac{\beta_2}{\mu}\right)$, le centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Dans le repère $\mathcal{R}" = (\omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$,l'équation de $\mathcal{C}$ est

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + h = 0.$$

D'où,

$$\mathcal{C} : \frac{X^2}{\frac{|h|}{\lambda}} + \frac{Y^2}{\frac{|h|}{\mu}} + \frac{h}{|h|} = 0$$

en posant $\frac{a^2 = |h|}{\lambda}$ et $\frac{b^2 = |h|}{|\mu|}$, on obtient l'équation équivalente

$$\frac{X^2}{a^2} + \varepsilon' \frac{Y^2}{b^2} + \varepsilon = 0$$

avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$.

Deuxième Cas : Dans le cas où le rang de la forme quadratique q est 1.

On a $\lambda\mu = 0$. Supposons $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$. L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sera alors

$$\lambda X'^2 - 2\beta_2 Y' - 2\beta_1 X' + f = 0.$$

Dans le repère $\mathcal{R}_0$ l'équation de $\mathcal{C}$ sera

$$\lambda\left(X'^2 - 2\frac{\beta_1 X'}{2\lambda}\right) - 2\beta_2 Y' + f = 0.$$

Soit $\omega\left(\frac{\beta_1}{\lambda}, 0\right)$; dans le repère $\mathcal{R}" = (\omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$, l'équation de $\mathcal{C}$ est

$$\lambda X^2 - 2\beta_2 Y + h = 0$$

□

Les résultats géométriques du théorème précédent sont récapitulés dans les tableaux suivants.

5.5 Tableaux récapitulatifs

Les tableaux suivant récapitulent les différentes formes réduites dégénérées et non dégénérées de la conique qui a pour équation

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + h = 0.$$

5.5.1 Cas d'une ellipse ($\lambda\mu > 0$)

5.5.2 Cas d'une hyperbole ($\lambda\mu < 0$)

5.5.3 Cas d'une parabole

Dans ce cas la conique a pour équation $\lambda X^2 - 2\beta_2 Y + h = 0$

5.6 Exemples et exercices

Exemple 5. Dans l'espace affine euclidien usuel $\mathbb{R}^2$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$9x^2 - 10xy + 4y^2 = 36\ .$$

Soit la forme quadratique

$$q(x,y) = 9x^2 - 10xy + 4y^2.$$

On a

$$q(x,y) = 9\left(x - \frac{5}{9}y\right)^2 + \frac{11}{9}y^2$$

donc la signature de q est $(2,0)$ et alors $\mathcal{C}$ est une ellipse.

L'endomorphisme autoajoint u de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$q(v) = < u(v), v > \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de φ sont

$$\lambda = \frac{13+5\sqrt{5}}{2} \text{ et } \mu = \frac{13-5\sqrt{5}}{2}$$

et

$$u_1 = (2)1-\sqrt{5}$$

et

$$u_2 = (2)1+\sqrt{5}$$

sont des vecteurs propres associés à λ respectivement μ Les axes de symétrie de $\mathcal{C}$ sont les droites passant par l'origine de vecteurs directeurs respectifs u_1 et u_2.

Exercice 8. WIMS : Invariants d'une conique

Ce cours a été préparé dans le cadre du projet européen TEMPUS CD-JEP-31147-2003, intitulé "Mathématiques Assistées à l'Ordinateur et Modélisation" et qui entre dans la rubrique Multimédias dirigée par Marie-Claude David et Bernadette Perrin-Riou, enseignants-chercheurs à l'université Paris-Sud.